Demonstratio Prop. XXXII Lib. I:mi

Elementorum Euclidis,

quam,

Annuente Facultate Philosophica,

Præside

CAROLO JOH. D:s HILL,

Math. Prof. Ord.,

pro Laurea capessenda

publice in Audit. Mathem. die XV Junii MDCCCXLVII ventilandam

proponit

CAROLUS LUNDGREN,

Smol.

II.

Lundæ,
typis Berlingianis,
MDCCCXLVII.

(Obs. Loco problematis, hoc ut coroll. ad 1: 16 proponi potest, nempe anguli Δ:li BFC æquare ipsius ABC).

Cor. 1. Bisecta AB in J et CJ producta in $= JK$, erit similiter $\wedge JAK = JBC$, ideoque jam tres anguli ad A æquales ipsis ABC dati trianguli.

Cor. 2. Similiter bisecta CF in E', atque producta BE' in $= E'F'$, tres anguli ad F æque tantum efficient, ac tres dati Δ:li; e. s. p.

Cor. 3. Sicuti vero $FC = AB$ ostendit Euclides, erit et $AF = BC$, simulque anguli ACB et CAF æquales ideoque hæ lineæ juxta 1: 27 parallelæ, et igitur $ABCF$ parallelogrammum, in quo et latera et anguli opposita æqualia sunt. Horum enim angulorum partes æquales probabantur. Similiter $ACBK$ et $FBCF'$ ejusmodi sunt parallelogramma; itemque sequentia $F'BCF''$, $F''BCF'''$ etc. si similis constructio continue adhibetur. Quorum ideo latera $KA = AF = FF' = F'F'' = F''F'''$ etc. ipsi BC opposita, huic et æqualia et parallela sunt *).

---

*) Si in quadrilatero $ABDC$ latera opposita $AB = DC$, $AD = BC$ æqualia fuerint, facile per 1: 8 ducendo diagonalem BD demonstres, angulos oppositos $A = C$ et $B = D$, itemque alternos ad diagonalem $ABD = BDC$, $ADB = CBD$ æquales esse, figuramque ideo parallellogrammum, et vice versa: (Fig. 18, 19).

Si enim fuerint $\wedge A = C$ et $B = D$ æquales, nec $AB = CD$ et $AD = BC$, sed $DE = AB$ et $BE = AD$ et primo apex E extra vel intra $\triangle BCD$, nec latera decussata, per 1: 21. anguli E et C inæquales forent; quod absurdum, cum in triangulis BCD et BED tria latera æqualia sint, ideoque (1: 8) etiam ang. $E = C$. Sin vero latera BC et ED sese decussarent, foret ang. $ABC < ABE = ADE < ADC$, seu $\wedge B < D$. Quod æque absurdum est.

Sin vero utrasque diagonales BD, AC, perque punctum intersectionis E lineam duxerimus quamcunque FG, facile ostenderimus has diagonales sese bisecare, hancque transversalem æquales cum parallelis AD et BC constituere angulos alternos F et G.

Plurimas igitur Parallelogrammorum proprietates absque parallelarum theoria demonstravimus.

Cor. 4. Si $AB > BC$ fuerit, erit angulus BFC minor dimidio ipsius ABC. Quia enim $FC = AB > BC$, fit (1: 18) ang. $FBC > BFC = ABE$, sed $\wedge B = FBC + ABE > 2 . BFC$. (Fig. 22).

Cor. 5. Linea igitur $AFF'F'' \dots F^V$ nunquam productæ BC occurrit. (Cor. 3).

Schol. Si tamen admitteres, lineam forte fractam $AF..F^V$ tandem ipsi BC productæ in F^V occurrere, triangulum F^VBC in duplicem lineam mutaretur, anguli ad F^V et B evanescerent, sed ang. BCF^V ideoque tres anguli A, B, C duo recti evaderent (1: 13). At hic extremus casus in plano finito obtingere nequit. (Cor. 5).

Sed eandem propositionem etiam aliter invenire licet. (Fig. 21).

Sit ABC triangulum, cujus basis BC utrinque (in E et D) sit producta; eruntque anguli interni $ABC + ACB < 2R$, (1: 17) ideoque externi $ABE + ACD > 2R$.

Sed latere AB magis magisque accedente ad latus AC, ut Ab, hi $(AbE + ACD)$ minus minusque ab contiguis $ACE + ACD$, qui duos rectos efficiunt, different; tandemque, Ab coincidente cum AC, anguli externi $ABE + ACD$ in $ACE + ACD$ seu duos rectos transibunt; idemque igitur de angulis $ABC + ACB$ illis contiguis valebit, qui ideo, evanescente BAC vel BC, in duos rectos mutantur. Aperte vero simile quid valebit, si basin quidem BC retinemus, sed apicem A magis magisque (usque in α vel distantiam infinitam) longinquum facimus, quo anguli externi $ABE + ACD$ in $\alpha BE + \alpha CD$ aperte minores transeunt, qui quasi contigui sunt, ideoque tandem tales habiti duos rectos efficient, sicuti etiam interni $\alpha BC + \alpha CB$ tandem (nempe in parallelis) duobus rectis æquales erunt. Quod jam Pr. 29 partem constituit. Simul vero aperte, si loco ipsius α ultimum punctorum F^V (in F. 22) posueris, anguli interni $F^VBC + F^VCB$ tandem duos rectos efficient, evanescente CF^VB, vel saltem a duobus angulis rectis angulo dato minus different, hoc dato minore evadente; quare summa angulorum trianguli cujusvis ABC, utut illis ipsius F^VBC æqualis, duos rectos efficiet. Huc accedit, quod similiter basin BC bisecando constructionemque Pr. 16. ad Triangulum BF^VC iterate adhibendo, tandem perveniamus ad Triangulum G^VF^VC, cujus latera infinite augentur, altitudine (seu perpendiculo e C in G^VF^V) continue decrescente, ut igitur utrumque, quod in primo ratiocinio posuimus, locum habeat; quare conclusio de angulis Trianguli G^VF^VC, qui ipsius ABC æquant, tanto magis valeat. — Attamen hæc magis est inventio,

quam probatio. Hanc vero methodo exhaustionis perficies, si lubet, demonstrando angulos ad F^{V} et G^{V}, una cum dicto perpendiculo, minores dato fieri. Sed hanc viam innuisse sufficiat, cum elementaris vix evadat. — Attamen, *quomodo anguli F^{V} G^{V} dato quovis minores fiant* breviter doceamus; — cum hoc ipsum et postmodum usus cujusdam erit.

Quoniam summa angulorum tum trianguli FBC tum FBA æquat summam trianguli ABC, illorum illud eligere licet, cujus angulus B' altero B^{0} haud major, ideoque haud major sed universim minor dimidio angulo ABC sit, hujusque angulum B' similiter diametro dividamus, rursumque angulum B'' eligamus, qui dimidio B' minor sit, et s. p. Quoniam igitur $B' < \frac{1}{2}B$, $B'' < \frac{1}{2}B'$, $B''' < \frac{1}{2}B''$ etc. cito ad angulum B^{V} dato minorem perveniemus. Jam hujus triangulo similiter transmutato, duo novi anguli hujus partes erunt, ideoque ipsorum summa etiam dato angulo minor. Quænam vero constructio quoque casu adhibenda sit, ex Cor. 4 colligas.

Cor. 6. Si igitur admiseris, per idem punctum duas diversas eidem BC parallelas duci non posse, quæ non in eadem jaceant recta, necessario KAF sit recta, ideoque tres anguli ad A, qui itidem trianguli ABC erant, duos rectos æquabunt. Sin minus; tamen concludes, lineam $KAFF'F''$... rectam esse vel fractam sursum vel deorsum, prout tres illi anguli $A+B+C$ trianguli dati $=$ vel $>$ vel $<$ duobus rectis fuerint.

Schol. Sed majores haud esse, mox videbis. Aut ideo illa recta erit aut deorsum (seu versus basin BC) fracta, idque *regulariter*, quia partibus æqualibus sub æqualibus angulis componitur. Deinde fractam deorsum haud esse, probabis, indeque trianguli cujusvis angulos duos rectos efficere, per Θ. p. 47 colliges. — Jam vero suspicari licet, angulos cujusvis trianguli eandem efficere summam. Quanta vero sit, facile patet, hanc summam rectum superare. In triangulis enim rectangulis atque obtusangulis hæc res per se patet. Acutangulum vero per constructionem modo adhibitam in illa mutatur. Alteruter enim hujus angulorum major sit angulo æquilateri, nisi ipsum fuerit æquilaterum. Si enim super quodam illius latere construxeris æquilaterum, hujus apex vel intra vel extra acutangulum, vel etiam in hujus latere erit. In unoquoque vero horum casuum facile per 1:21 rem expedias. Æquilateri vero unica transmutatio ocularis sufficiat; vel etiam suam in obtusan-

gulum mutationem eo probes, quod absurdum sit, lineam ipsi BC parallelam hujusque quantuplicem ex A in $FF'F''..F^{V}$ productam perpendiculari e C in BC eductæ nunquam occurrere, cum tamen C dimidia tantum BC ab perpendiculari per A in BC transiente distet.

Porisma. (Fig. 1). Si tres anguli cujusvis Trianguli ACD eandem effecerint summam, hæc duobus rectis necessario æqualis erit.

Sint enim illi $\alpha(=A)$, $\beta(=D)$ et $\gamma(=C)$ in Triangulo ACD, atque $\beta'(=CDE)$, $\gamma'(=DCE)$ et $\delta(=E)$ in adjacente CDE, exsistente latere CD communi, atque ADE recta linea, ut simul oriatur triangulum ACE, cujus anguli sunt $\gamma'+\gamma$, α et δ. Quorum igitur summa $\alpha+\gamma+\gamma'+\delta$ sit æqualis summæ horum $=\gamma'+\beta'+\delta$, ideoque, communi $\gamma'+\delta$ ablato, interni $\alpha+\gamma=\beta'$ externo. Addito igitur β, fiet $\alpha+\beta+\gamma=\beta'+\beta=2R$. (1: 13).

Schol. Res igitur ita facile pateret; sed objici potest, triangula dari posse, quorum angulorum summæ diversæ sint, quanquam negari nequeat, innumera dari, quibus eadem trium sit summa angulorum.

Prop. 2. Theor. (Fig. 10.) Latere quodam BC (seu BB') Trianguli ABC (seu ABB') cujuscunque æque tantum protracto in E (seu B''), ut sit $CE=BC$, atque super hoc CE descripto ordinatim (=simili situ et ad easdem partes) Triangulo ($A'B'B''$ seu) DCE illi ABC congruente, (Ex. 1: 8, si $DC=AB$ et $DE=$ $=AC$ per 1: 22 fiunt); erit linea AD (seu AA'), quæ horum Triangulorum apices jungit, major, æqualis vel minor latere protracto BC (seu BB'), prout trianguli ABC tres anguli simul minores, æquales vel majores duobus rectis fuerint. (Scil. $AD>=<BC$, prout $A+B+C<=>2R$). (Consulas partem $AA'B''B'B$ fig. 10, cujus litteras in $ADECB$ ordine mutes, accentus evitandi causa).

Quia enim utriusque Trianguli latera respective æqualia sunt facta, etiam (ex 1: 8) horum anguli conveniunt, ut sit $\wedge DCE = B$, itemque $(A'B''B' =) E = ACB (= AB'B) = C$ et $(A' =) D = A$; quare jam $\triangle$:li ABC anguli simul $= B + ACB + A = DCE + ACB + BAC$ efficiunt; ideoque si illi $< = > 2R$ fuerint, etiam hi $< = > 2R$ erunt. Sunt vero duo recti $= 2R =$ tribus $ACB + ACD + DCE$ (ad C seu B'), ergo erunt $DCE + ACB + BAC < = > ACB + ACD + DCE$, seu, communibus sublatis, $BAC < = > ACD$ erit, prout tres illi anguli $B + C + A < = > 2R$. Jam vero Triangula BAC, DCA duobus gaudent lateribus respective æqualibus, nempe $AB = DC$ et AC communi; ergo (1: 24) tertium latus $BC < = >$ tertio AD erit, prout angulus oppositus $BAC < = >$ opposito ACD fuerit; quare jam $BC < = > AD$ necessario sit, prout Trianguli ABC anguli $B + C + A < = > 2R$ fuerint; sicuti contendimus.

Lemma. (Fig. 11). Recta linea (AG) earum, quæ duo puncta (AG) conjungunt, brevissima est.

Sit enim alia $ABCDEFG$ eadem conjungens, ducanturque AC, AD, AE, AF: eritque in Triangulis inde ortis

$$AB + BC > AC$$
$$AC + CD > AD$$
$$AD + DE > AE$$
$$AE + EF > AF$$
$$AF + FG > AG$$

et igitur (2 et 3 Ax.) $AB + BC + CD + DE + EF + FG > AG$.

Cor. **Quamquam hoc tantum de linea fracta $ABCDEFG$ probavimus, idem de curva valiturum, facile conjicies.**

Prop. 3. Theor. Trianguli cujusvis anguli unâ duos rectos haud (Fig. 10.) excedunt.

Sint enim, si fieri potest, Trianguli ABB' anguli simul $> 2R$; fiet, si ipsi congruens Triangulum $A'B'B''$ super $B'B''=$ productæ BB' similiter construitur, ex præc. Theor. $BB' > AA'$, seu basis BB' connectentem AA' certa quadam linea $c (= BB' - AA')$ excedet. Similiter producta $B'B''$ in $B''B'''$, factoque $A''B''B'''$ ipsi $A'B'B''$ congruens, æque tantum $B'B''$ superabit $A'A''$. Quia enim $AB = A'B' = A''B''$, $AB' = A'B'' = A''B'''$ et $BB' = B'B'' = B''B'''$; anguli Triangulorum ABB', $A'B'B''$ et $A''B''B'''$ convenient, ideoque erit $AB'B = A'B''B'$ et $A'B'B'' = A''B''B'''$. Omnes vero tres anguli ad B' eandem efficiunt summam $(2R)$, ac illi ad B''; ablatis igitur istis æqualibus, supererit $\wedge\, AB'A' = A'B''A''$. Latera vero hos angulos comprehendentia æqualia fecimus, ergo (1: 4) bases $AA' = A'A''$ æquales sunt, quare $BB' - AA' = B'B'' - A'A''$ necessario sit, sicuti contendimus. Ulterius igitur, quia ABB' est Triangulum, $AB + AB'$ certa quadam linea d excedit basin BB' (1: 20), nihilotamen minus multiplum quoddam ipsius c, ut $5c$, datur, quod hanc d superat (Proport. lära D. 6.); æque ideo multiplum $B'B^{VI}$ ipsius BB' productæ capiamus, atque in suas partes æquales $B'B'' = B''B''' = B'''B^{IV} = B^{IV}B^{V} = B^{V}B^{VI}$ dividamus *), super quas Triangula ipsi ABB' congruentia versus eandem plagam construamus, horumque apices (A) A', A'', A''', A^{IV}, A^{V} connectamus. Quo facto, erit, sicuti modo ostendimus, $BB' - AA' = c$

$$B'B'' - A'A'' = c$$
$$B''B''' - A''A''' = c$$
$$B'''B^{IV} - A'''A^{IV} = c$$
$$B^{IV}B^{V} - A^{IV}A^{V} = c,$$

ideoque addendo $BB^{V} - AA^{V} = 5c$, (si breviter AA^{V} pro $AA' + A'A'' + A''A''' + A'''A^{IV} + A^{IV}A^{V}$ seu pro $AA'A''A'''A^{IV}A^{V}$ scribimus). Sed

*) In fig. 10 jam A^{V} pro F, B^{V} pro f et B^{VI} pro g ponas.